

E

7.

VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio



Palchetto

Num.^o d'ordine

89

24250

NAZIONALE

B. Prov.

II

7

NAPOLI

R. BIBLIOTECA

VITT. EM. III

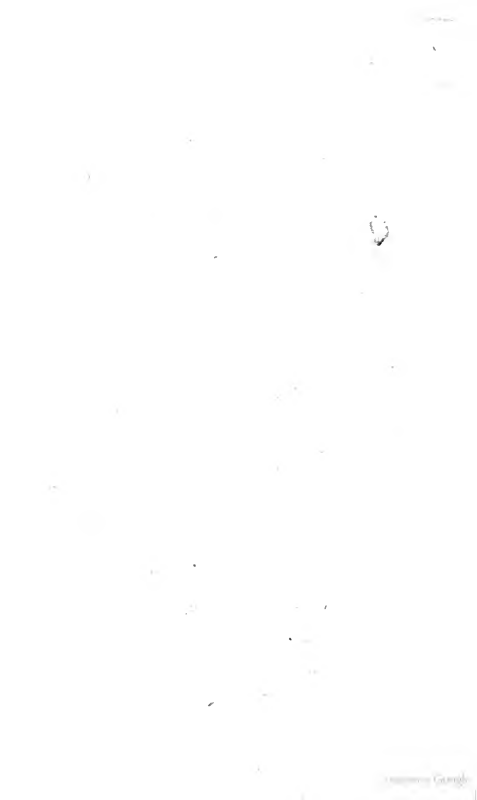
~~1205-19~~

17 A 20

B. Prov.

II

7



609.025

NUOVE
DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE

DEL SACERDOTE

D. FRANCESCO OLIVA

DI

BALVANO.



Vol. I. Libro I., e II.



NAPOLI

Dai torchi dei Fratelli Paci.

1826.



16.000

PREFAZIONE.



Quest' opera delle nuove dimostrazioni matematiche ; o Signori , verrà divisa in due piccioli volumi , e ciascun volume in due libri.

Le dimostrazioni del primo libro , oltre al vantaggio delle nuove scoperte , tendono a formare una mirabile piramide , che rappresenta bocce , albori , fiori , e molte cose , che in essa si osservano .

Quelle del secondo libro tendono a confutare la dimostrazione trentacinque del primo libro di Euclide : e conosceremo con ogni chiarezza , che sopra l' istessa base , e tra l' istesse parallele non possono mai formarsi due eguali parallelogrammi.

Le dimostrazioni del terzo , e quarto libro , ci faranno conoscere l' identica misu-

ra dell'aia , o sia della superficie del cerchio ; e nel terzo libro propriamente conosceremo l' identica proporzione , che passa tra il raggio , e la metà della circonferenza.

DEFINIZIONI.



I.

Quando in un triangolo due lati sono eguali tra di loro, l'angolo che si forma da questi lati è perpendicolare alla metà della base.

II.

Quando i lati che formano l'angolo ottuso sono eguali a quelli, che formano l'angolo acuto; l'angolo ottuso ha minor altezza dell'angolo acuto.

III.

I lati dell'angolo acuto vanno a medesimarsi nella parte angolare di tanto, quanto più o meno l'angolo è acuto. (di questa definizione, e delle altre due, che sieguono, nel terzo libro si conoscerà la verità con evidenza di ragione).

IV.

Quando i centri di due cerchi sono nelle due estremità di un lato di un quadrato,

(cioè un centro in una estremità , l' altro nell' altra) e l' intervallo di ciascuno è l' istesso lato ; le circonferenze allora vanno ad intersecarsi nell' aia del quadrato in quel punto che segna di altezza sei ottave , e sette sessantaquattresime.

V.

I lati del triangolo equilatero , vanno a medesimarsi nella parte angolare di una ottava di una sessantaquattresima , e di una sessantaquattresima di un' ottava di un quadrato , che può formarsi sopra un lato di esso triangolo.

VI.

Il rombo è composto di due triangoli equilateri.

VII.

L' aia del quadrato , al nostro bisogno la divideremo in otto eguali parti , e ciascuna in altre otto.

VIII.

L' aia del rombo è mancante relativamente a quella del quadrato (che può formarsi

sopra ad un lato) di un' ottava, quattro sessanta-⁷
taquattresime , e tre ottave di una sessanta-
quattresima.

IX.

La figura nona - equilatera è composta di tre quadrati formati sopra i tre lati del triangolo equilatero , e di tre rombi in mezzo ai tre vuoti , che hanno lasciato i tre quadrati.

X.

La figura settima - equilatera è composta di due quadrati innalzati sopra due lati del triangolo equilatero , e di un rombo in mezzo al vuoto che hanno formato i due quadrati.

XI.

La spuria figura settima - equilatera è composta di due quadrati sopra due lati del triangolo equilatero.

XII.

L' aia dell' esaono si divide in sei triangoli equilateri.

Quando sopra i sei lati dell' esaono si sono formati sei quadrati, ed in mezzo ai quadrati sei triangoli equilateri, si è costruito il dodicaono.

Prop. I. Teorema I.

Figura I.

Se attorno di un quadrato v' è descritta una figura quadrilatera, e rettangola, in modo che il quadrato interno coi suoi quattro angoli tocca, e divide nella metà i quattro lati della figura esterna: ne risulta che questa figura sarà parimente un quadrato.

Se attorno del quadrato BD v' è descritta una figura quadrilatera, e rettangola OK, in modo che il quadrato interno BD coi suoi quattro angoli B, C, D, A tocca, e divide nella metà i quattro lati della figura esterna, e propriamente nei punti A, B, C, D: io dico, che questa figura esterna OK sarà un quadrato.

Nel quadrato BD si tirano dai punti C, ed A la diaonale CA; e dai punti B, e D la diaonale BD.

Poichè OS essendo stato diviso per metà

nel punto C dall'angolo BCD, ed il lato PK parimente diviso per metà nel punto A dall'angolo BAD: ed essendo dalla costruzione tirata la diaonale CA nel quadrato BD, e propriamente nell'istessi punti C, ed A dove sono stati divisi i lati: sarà conseguentemente la diaonale CA parallela, ed eguale tanto al lato SK, quanto al lato OP della figura esterna OK.

Similmente il lato OP essendo stato diviso per metà nel punto B dall'angolo CBA, ed il lato SK parimente diviso per metà nel punto D dall'angolo CDA: ed essendo dalla costruzione tirata la dinonale BD dalli stessi punti D, e B dove sono stati divisi per metà OP, SK: sarà conseguentemente la diaonale DB parallela, ed eguale tanto al lato OS, quanto al lato PK della figura esterna OK.

Ma le dinonali CA, DB sono per natura del quadrato tra loro eguali: ed a queste essendosi dimostate eguali i lati della figura esterna OK: così sarà OK equilatera, quadrilatera, e rettangola, e conseguentemente quadrata.

Se dunque attorno di un quadrato v'è descritta una figura quadrilatera, e rettangola, in modo che il quadrato interno coi suoi quattro angoli tocca, e divide, ec.

Prop. II. Teorema II.

Figura II.

Se d'intorno ad un quadrato v'è descritto obliquamente un' altro quadrato di modo che il quadrato interno coi suoi quattro angoli tocca, e divide ciascun lato del quadrato esterno in una porzione maggiore, ed in una minore: ne risulta che ciascuna porzione minore sarà eguale a tutte le minori separatamente prese, e ciascuna maggiore parimente eguale a tutte le maggiori separatamente prese.

Dato sia il quadrato AC, che nell'interno obliquamente vi sia descritto il quadrato, RS di modo che coi suoi angoli tocca, e divide i lati del quadrato esterno in porzioni minori OB, SC, PD, AR; ed in porzioni maggiori AD, RS, CP e RD: io dico che ciascuna porzione minore sarà eguale a tutte le minori separatamente prese, e ciascuna maggiore parimente eguale a tutte le maggiori separatamente prese.

Poichè essendo la figura esterna AC un quadrato: essendo, che la figura interna RS è parimente un quadrato: essendo che il quadrato RS tocca coi suoi quattro angoli R, O, S, P i quattro lati del quadrato AC fuo-

ri della metà : così per natura dei quadrati n'avviene che in quel punto , che un' angolo divide un lato , saranno i rimanenti lati divisi negli stessi punti dai rispettivi angoli.

Ma per essere i lati toccati fuori della metà ciascuno sarà diviso in una porzione maggiore , ed in una minore : e conseguentemente ciascuna maggiore è eguale a tutte le maggiori separatamente prese , non che ciascuna minore a tutte le minori.

Se dunque d'intorno ad un quadrato v'è descritto obbliquamente , ec.

Prop. III. Teorema III.

Figura II.

Se nell' interno di un quadrato v'è descritto obbliquamente un' altro quadrato , che coi suoi quattro angoli tocca i quattro lati del quadrato esterno : e se colle porzioni dei lati del quadrato esterno , e coll' interi lati del quadrato interno si sono formati quattro triangoli : ne risulta che questi quattro triangoli col dimostrarsi tra di loro eguali , l' aia sarà parimente eguale.

Se nell' interno del quadrato AC v'è descritto obbliquamente il quadrato PO , che coi suoi quattro angoli tocca i quattro lati

del quadrato esterno: e se colle porzioni dei lati del quadrato AC , e coll' interi lati di PO si sono formati quattro triangoli AOR , BSO , CPS , DRP : io dico che questi quattro triangoli col dimostrarsi tra loro eguali, l'aia sarà parimente eguale.

Poichè nel Teorema antecedente abbiamo dimostrato, che nei lati del quadrato esterno ciascuna porzione maggiore è eguale a ciascuna maggiore; e ciascuna minore eguale a ciascuna minore, cioè la porzione maggiore RD eguale alla maggiore OA ; e la porzione minore DP eguale alla minore AR ; e poi la base OR eguale alla base RP , perchè interi lati del quadrato PO : n'avviene che l'angolo AOR è eguale all'angolo DRP , e l'angolo OAR eguale ad RDP , e l'angolo ARO eguale a DPR , e tutto il triangolo eguale a tutto il triangolo, e conseguentemente l'aia del triangolo AOR eguale all'aia del triangolo DRP .

All' istesso modo si dimostrerà per gli altri due triangoli.

Ed ecco che se nell'interno di un quadrato v' è descritto obbliquamente, ec.

Prop. IV. Teorema IV.

Figura II.

Se d' intorno ad un quadrato v' è descritta una figura quadrilatera , e rettangola : in modo che il quadrato interno coi suoi quattro angoli tocca , e divide fuori della metà i quattro lati della figura esterna : ne risulta che questa figura sarà sempre un quadrato.

Se d' intorno al quadrato PO , v' è descritto la figura quadrilatera , e rettangola DB in modo che il quadrato PO coi suoi quattro angoli P , R , O , S tocca , e divide i quattro lati della figura esterna fuori della metà : io dico che la figura DB sarà sempre un quadrato.

Poichè pel teorema secondo , in cui i quattro angoli del quadrato interno avendo divisi i quattro lati del quadrato esterno in una porzione maggiore , ed in una minore : e che in esso si è dimostrato , che le porzioni minori sono eguali alle minori , e le maggiori alle maggiori : così il quadrato PO coi suoi quattro angoli avendo diviso i quattro lati della figura DB fuori della metà , ossia in una porzione maggiore , ed in una minore : n'av-

viene parimente, che le maggiori sono eguali alle maggiori, e le minori alle minori.

Ed essendo che ciascun lato abbraccia una maggiore, ed una minore: così tutti i quattro lati di DB sono tra loro eguali: e conseguentemente DB oltre all'essere quadrilatera, e rettangola sarà parimente equilatera, ed a tale oggetto una figura quadrata (1).

Se d'intorno ad un quadrato, ec.

Prop. V. Teorema V.

Figura III.

Se nell'interno di un quadrato v'è descritto un'altro quadrato in modo che ciascun angolo tocchi nella metà ciascun lato del quadrato esterno: ne risulta che il quadrato interno è sempre minore del quadrato esterno.

Se nell'interno del quadrato DB v'è de-

(1) Si avverte dunque; che i lati della figura esterna, la quale è quadrilatera, e rettangola, o che siano divisi dagli angoli del quadrato interno nella metà, o fuori della metà; sarà la figura esterna sempre un quadrato: perchè qualora i lati vengono divisi fuori della metà; allora tanto ne hanno egualmente acquistato le porzioni maggiori, quanto egualmente ne hanno perduto le minori.

scritto il quadrato NP in modo che con ciascun angolo tocca ciascun lato del quadrato esterno nella metà, cioè nei punti M, N, O, P: io dico che il quadrato interno NP è sempre minore dell' esterno DB.

Si tira in DB la diaonale AC, ed in NP, la diaonale MO.

Poichè nel quadrato per sua natura la diaonale è sempre maggiore di ciascun lato: ed essendo maggiore di ciascun lato: così il quadrato interno NP per essere eguale all' esterno DB avrebbe d' avere la sua diaonale MO maggiore di ciascun lato DC, AB, che appartengono al quadrato esterno DB: e di vantaggio avrebbe da essere la diaonale MO eguale alla diaonale AC. Ma MO per essere nella metà dei lati orizzontali AD, BC; e propriamente nei punti M, ed O; e per essere DB un quadrato, cade conseguentemente MO perpendicolarmente sopra BC; come cadono i lati AB, DC; e perciò MO è eguale tanto ad AB, quanto a DC.

Ed essendo MO eguale tanto al lato AB, quanto al lato DC, che sono entrambi lati del quadrato DB: così la diaonale MO è minore della diaonale AC.

Ma MO appartiene al quadrato interno, ed AC al quadrato esterno: dunque il quadrato interno NP è minore dell' esterno DB.

Se nell' interno del quadro v'è descritto un' altro quadrato in modo che con ciascun angolo nella metà , ec.

Prop. VI. Teorema VI.

Figura IV.

Se nell' interno di un quadrato vi sono descritti due quadrati ; uno che con ciascuno angolo tocca nella metà ciascun lato del quadrato esterno , l' altro situato obbliquamente , cioè tocca coi suoi angoli i lati fuori della metà : ne risulta che quest' ultimo quadrato è maggiore di quello che tocca nella metà.

Se nell' interno del quadrato AC sono descritti due quadrati NP che tocca coi suoi angoli nella metà dei lati del quadrato esterno , e propriamente nei punti M , N , O , P ; e l' altro TK situato obbliquamente, che tocca coi suoi angoli i lati del quadrato esterno fuori della metà , e propriamente nei punti S , K , R , T : io dico che il quadrato TK è maggiore del quadrato NP.

Nel quadrato TK si tira la diaonale SR ; nel quadrato NP si tira la diaonale MO.

Poichè per essere eguale il quadrato TK al quadrato NP dovrebbe essere la diaonale R perpendicolare sopra l' orizzontale BC, e

conseguentemente eguale a DC. Come per dimostrare nel teorema antecedente, che il quadrato interno, e minore del quadrato esterno, abbiamo detto, che MO è eguale a CD.

E per vedere se RS è perpendicolare sopra l'orizzontale BC: dall'orizzontale AD si prenda la porzione HD eguale ad RC: e dai punti H, ed R si tira la retta HR.

Poichè essendo RC porzione dell'intera BC, ed HD porzione dell'intera AD: ed essendo RC, HD tra loro eguali: ed essendo che CD sta a perpendicola sopra BC, perchè lato del quadrato: ed essendo finalmente che dagli estremi delle porzioni RC, HD, e propriamente dai punti R, ed H si è tirata la retta HR: così HR sarà perpendicolare sopra BC, come DC è perpendicolare sopra l'istessa BC; per cui HR essendo perpendicolare sopra BC non solo produce gli angoli HRB, HRC retti, egualmente ch'è retto DCB: ma bensì HR è eguale a DC. Onde SR per produrre gli angoli retti, ed essere eguale a DC dovrebbe egualmente essere perpendicolare nel quadrato AC, e per esser tale dovrebbe essere situata nel luogo di HR. Ma fingiamo che SR sia perpendicolare; così sarà l'angolo HRC eguale tanto all'angolo maggiore HRB, quanto all'angolo minore SRB; tolto HRC resterà l'angolo maggiore

HRB eguale all' angolo minore SRB, qual cosa è impossibile: dunque la diaonale SR non potendo essere perpendicolare, sarà per necessità maggiore di HR. Non può essere minore: perchè essendo tale non toccherebbe con ambi gli estremi i lati opposti del quadrato AC.

Ed essendo che HR l'abbiamo dimostrata eguale a DC, come indirettamente la diaonale MO pel teorema antecedente si è detto ch'è eguale all' istessa DC; tolta DC resterà HR eguale ad MO.

Abbiamo dimostrato poi che HR è minore della diaonale SR: così anche la diaonale MO sarà minore della diaonale SR: e conseguentemente la diaonale MO del quadrato interno NP essendo minore della diaonale SR del quadrato parimente interno TK: così sarà il quadrato NP minore del quadrato TK.

Ma il quadrato NP tocca coi suoi angoli nella metà dei lati del quadrato esterno AC; ed il quadrato poi TK lo tocca coi suoi angoli fuori della metà, per essere obbliquamente situato: per cui il quadrato TK è maggiore del quadrato NP.

Dunque se nell' interno di un quadrato vi sono descritti due quadrati, ec.

Corollario.

Quanto più il quadrato interno si avvicina coi suoi angoli a quelli del quadrato esterno, tanto via più acquista maggior grandezza.

Prop. VII. Teorema VII.

Figura V.

Se sopra due lati di un triangolo equilatero si sono innalzati due quadrati: ne risulta che nell'estremità dei lati dove i quadrati si uniscono formano nella parte esteriore un'angolo ottuso.

Se sopra due lati AB , AC del triangolo equilatero ABC si sono innalzati due quadrati DB , KC : io dico, che nell'estremità, o sia nel punto A dove i quadrati si sono uniti hanno formato l'angolo ottuso DAK .

Sopra il quadrato DB s'innalza il quadrato VD .

Poichè essendo VD un quadrato, sarà l'angolo DAV retto: ma l'angolo DAK è maggiore dell'angolo DAV di quanto è l'angolo VAK : così sarà l'angolo DAK ottuso.

Di vantaggio tutti gli angoli al vertice presi insieme sono per loro natura eguali a quattro retti: ma gli angoli DAB , KAC so-

no retti, perchè angoli dei quadrati: l'angolo poi BAC è acuto, perchè angolo del triangolo equilatero: così ne risulta che per giungere a quattro retti, l'angolo DAK per assoluta necessità dee essere ottuso; e per cui l'angolo VAD ha lasciato tanto di spazio all'angolo DAK , di quanto è l'angolo VAK .

E perciò se sopra due lati di un triangolo equilatero si sono innalzati due quadrati, ec.

Prop. VIII. Teorema VIII.

Fig. VI.

Se si sono innalzati due quadrati sopra due lati di un triangolo equilatero: questi quadrati saranno tra di loro eguali.

Se sopra due lati AB , AC del triangolo equilatero BAC si sono innalzati due quadrati DB , KC : io dico, che DB , KC sono tra loro eguali.

Poichè il lato AB è eguale al lato AC , perchè lati del triangolo equilatero: e sopra AB è stato innalzato il quadrato DB è sopra AC è stato innalzato il quadrato KC : sarà conseguentemente il quadrato DB eguale al quadrato KC .

E perciò se si sono innalzati due quadra-

ti sopra due lati di un triangolo equilatero: questi quadrati, ec.

Prop. IX. Teorema IX.

Figura VII.

Se si sono innalzati due quadrati sopra due lati di un triangolo equilatero, e che nell'estremità dei lati dove i quadrati si sono uniti hanno formato nella parte esteriore un'angolo ottuso; e se dall'altra estremità dell'istessi lati si è tirata una retta, che ha completato un triangolo ottusangolo: ne risulta che questa retta è parallela alla retta del triangolo equilatero, la quale s'oppone all'angolo verticale.

Se sopra il triangolo. BAC si sono innalzati due quadrati AH; AN; e che nel punto A dove i quadrati si sono uniti hanno formato l'angolo ottuso DAK: e se dai due estremi D, e K si è tirata la retta DK: io dico che la retta DK è parallela alla retta BC, che s'oppone all'angolo verticale BAC.

Si tirano nei quadrati AH, AN le diagonali DB KC, che si sono partite dai punti D, e K in cui sono gli estremi della retta

DK; e sono andate a finire nei punti **B**, e **C** dove sono le estremità della retta **BC**.

Poichè essendo che i lati **AB**, **AC**, **AD**, **AK** pel Teorema antecedente sono tra loro eguali, e che hanno formato coi loro estremi gli angoli verticali in **A**, e cogli altri estremi sono negli stessi punti **D**, **K**, **B**, **C** dove sono le estremità delle rette **DK**, **BC**: ed essendo la diaonale **DB** eguale alla diaonale **KC**, perchè dividono quadrati eguali; e queste sono nei medesimi punti: così ne risulta, che con formare tutti questi dati l'angolo **BDK** eguale all'angolo **CKD**, e l'angolo **DBC** eguale all'angolo **KCB**; sarà conseguentemente la retta **DK** parallela alla retta **BC**.

Se dunque si sono innalzati due quadrati sopra due lati di un triangolo equilatero, e che nell'estremità, ec.

Prop. X. Teorema X.

Fig. VIII.

Se l'aia di un quadrato è stata totalmente occupata da sessantaquattro piccioli, ed eguali quadrati: e se i punti di unione dei piccioli quadrati formano la divisione dei lati del gran quadrato: ne risulta, che ciascun lato di questo quadrato sarà diviso in otto eguali parti.

Se l'aia del quadrato AC è stata totalmente occupata da sessantaquattro piccioli, ed eguali quadrati G, H, K, P, S, Z: e se i punti di unione dei piccioli quadrati, cioè G con H: H con K: K con P: P con SZ formano la divisione dei lati DC, DA, AB, BC del quadrato AC: io dico che ciascun lato del quadrato AC sarà diviso in otto eguali parti.

Poichè essendo che i piccioli quadrati G, H, K, P sono eguali tra di loro: essendo che le unioni di essi, cioè G con H, H con K, K con P formano la divisione del lato AB; essendo che non solo vicino al lato AB vi sono otto piccioli quadrati; ma bensì vicino a ciascun lato BC, CD, DA; perchè la radice quadrata di sessantaquattro è otto: così n'avviene, che ciascun lato del

quadrato AC resta diviso in otto eguali parti.

Dunque se l' aia del quadrato è stata totalmente occupata da sessantaquattro piccioli quadrati , ec.

Corollario. I.

Se poi l' aia del quadrato vien occupata da 4096 piccioli , ed eguali quadrati : allora ciascuno lato sarà diviso in sessantaquattro eguali parti.

Corollario II.

Se poi si vuol dividere un lato del triangolo per metà , o in altre parti : allora si forma il quadrato sopra il lato , e così si divide in quelle parti che si vuole.

Prop. XI. Teorema XI.

Figura IX.

Se si sono innalzati due quadrati sopra due lati di un triangolo equilatero , e che dall' estremità dei lati dove i quadrati si sono uniti hanno formato nella parte esteriore un' angolo ottuso ; se dall' altra estre-

mità dell' istessi lati si è tirata una retta, che ha completato un triangolo ottusaangolo: se questa retta è parallela alla retta del triangolo equilatero, che s'opponne all'angolo verticale: e se finalmente dalla metà di una parallela alla metà dell'altra si è innalzata una retta: ne risulta, che questa retta non solo è perpendicolare; ma bensì è passata pel vertice.

Se sopra i lati AB AC del triangolo ABC si sono innalzati due quadrati AH , AN ; e che nel punto A hanno formato l'angolo ottuso: e se dagli altri estremi degli stessi lati si è tirata la retta DK , che ha completato il triangolo ottusangolo KDA : se la retta DK è parallela a BC : e se finalmente dalla metà della parallela BC alla metà della parallela DK , e propriamente dal punto S al punto T si è innalzata la retta ST : io dico che ST non solo è perpendicolare; ma bensì è passata, pel vertice A .

Poichè essendo i lati AD , AK , AB , AC eguali tra di loro; perchè pel teorema VIII, i quadrati AH , AN sono parimente tra loro eguali: essendo l'angolo verticale DAB eguale all'angolo verticale KAC , perchè angoli retti dell'istessi quadrati AH , AN , essendo pel teorema IX, che DK è parallela a BC : essendo per la defin: I. che non solo l'an-

angolo verticale DAK è perpendicolare alla metà della base DK : ma bensì l'angolo verticale BAC è perpendicolare alla metà della base BC : essendo che dalla metà di BC alla metà di DK si è innalzata la retta ST ; così n'avviene che ST non solo è perpendicolare : ma bensì è passata pel vertice A , cc.

Prop. XII. Teorema XII.

Figura X.

Se un triangolo ottusangolo è stato formato sopra due lati di due quadrati , che sono innalzati sopra due lati del triangolo equilatero ; e se dalla metà della base , che s'oppone all'angolo verticale del triangolo equilatero , alla metà della base che s'oppone all'angolo ottuso dell'altro triangolo , si è innalzata una perpendicolare , ch'è passata pel vertice : ne risulta che la porzione della perpendicolare , che occupa il triangolo ottusangolo è minore di quella , che occupa il triangolo equilatero.

Se il triangolo ottusangolo DAK è stato formato sopra i due lati AD , AK dei due quadrati AH , AN , che sono innalzati sopra i due lati AB , AC del triangolo equilatero ABC : e se dalla metà della base BC , che s'oppone

all'angolo verticale BAC , alla metà della base BK , che s'opponè all'angolo ottuso DAK , e propriamente dal punto S al punto T si è innalzata la perpendicolare ST , ch'è passata pel vertice A : io dico che la porzione AT , che occupa il triangolo ottusangolo DAK è minore della porzione SA , che occupa il triangolo equilatero ABC .

Poichè essendo che i lati AD , AK , AB , AC sono tra di loro eguali, pel teor. VIII. perchè lati dei quadrati AH , AN : essendo che nel triangolo KDA , i lati AD , AK formano l'angolo ottuso nel vertice A , ed i lati AB , AC formano l'angolo acuto nell'istesso vertice A ; ed essendo che l'angolo ottuso DAK , per la definizione II. ha minor altezza dell'angolo acuto BAC : essendo finalmente che dalla metà della base BC alla metà della base DK si è innalzata la perpendicolare ST , e questa, pel teor. antecedente, è passata pel vertice A : così n'avviene che la porzione AT , che occupa il triangolo KDA , è minore della porzione SA , che occupa il triangolo equilatero ABC .

Se dunque un triangolo ottusangolo è stato formato sopra due lati di due quadrati, che, ec.

Prop. XIII. Teorema XIII.

Figura X

Se si sono innalzati due quadrati sopra due lati di un triangolo equilatero; e che nell'estremità dei lati dove i quadrati si sono uniti hanno formato nella parte esteriore un'angolo ottuso: se dagli altri estremi dell'istessi lati si è tirata una retta, che ha completato un triangolo ottusangolo: se questa è parallela alla retta del triangolo equilatero, che s'opponne all'angolo verticale: e se con tirare altre rette intorno ad uno dei quadrati, vienè a formarsi una figura quadrilatera, che coi suoi quattro lati tocca i quattro angoli del quadrato: ne risulta che questa figura esterna sarà rettangola.

Se sopra il triangolo equilatero ABC si sono innalzati due quadrati AH, AN, e che nel punto A dove i quadrati AK, AN si sono uniti, hanno formato l'angolo ottuso DAK: se dagli altri estremi degli stessi lati si è tirata la retta DK, che ha completato il triangolo ottusangolo KDA: se la retta DK è parallela alla retta BC: se dalla metà della parallela BC alla metà della parallela DK si è innalzata la perpendicolare ST, che forma un

lato della figura intorno ad uno dei quadrati, sia AH ; e se finalmente con perfezionare gli altri tre lati intorno all'istesso AH , in modo che si forma una figura quadrilatera, che coi suoi quattro lati tocca i quattro angoli del quadrato AH : io dico che questa figura esterna sarà rettangola.

Si prolunga tanto TD verso Q , quanto SB verso G : indi vicino all'angolo H si tira la retta EV parallela a TS , e che vada intersecarsi con TQ , SG nei punti O , e P , in modo che prendendosi le porzioni TO , OP , PS resta intorno al quadrato AH la figura quadrilatera OS , che coi suoi quattro lati tocca i quattro angoli di AH nei punti D , H , B , A .

Poichè, quel teor. IX., essendo TD parallela ad SB , perchè porzioni di KD , CB ; e dalla costruzione tanto TD si è allungata verso Q ; quanto SB verso G ; e che poi TO , SP hanno formato due lati della figura quadrilatera: così i due lati TO , SP sono paralleli. E poi il lato ST perpendicolare, per teo. XI.; ed a ST si è costruita OP parallela: così avremo i quattro angoli TOP , OPS , PST , STO retti, e conseguentemente la figura esterna OS è rettangola.

Dunque se si sono innalzati due quadrati sopra due lati un triangolo equilatero, e che, cc.

Figura XII.

Se un triangolo ottusangolo è stato formato sopra due lati di due quadrati, che sono innalzati sopra due lati di un triangolo equilatero: e se d'intorno ad uno dei quadrati colla metà della base del triangolo ottusangolo, e colla metà della base del triangolo equilatero è stata completata una figura quadrilatera, e rettangola: e se finalmente i lati di tal figura sono stati divisi dagli angoli del quadrato interno: ne risulta che la divisione sarà fuori della metà di tai lati, e conseguentemente saranno divisi dagli angoli del quadrato in una porzione maggiore, ed una minore.

Se il triangolo ottusangolo KDA è stato formato sopra i due lati AD AK dei quadrati AH, AN, che sono stati innalzati sopra i lati AB, AC del triangolo ABC, e d'intorno ad uno dei quadrati, e sia AH, che colla porzione TD della base KD, e colla porzione SB della base CB è stata completa la figura quadrilatera, e rettangola OS: e se finalmente i lati ST, TO, OP, PS della figura OS sono stati divisi dagli angoli del quadrato AH nei punti A, D, H, B: io dico

che tai punti saranno fuori della metà di tai lati, e conseguentemente saranno divisi in una porzione maggiore, ed una minore.

Poichè essendo, pel teorema XII., che la porzione AT è minore della porzione AS : esseudo che all'istesso modo si dimostrarebbe OT , OP , PS se in ciascun lato si costruisce un triangolo acuto, ed un' altro ottuso; così n' avviene che i lati della figura esterna quadrilatera, e rettangola OS sono divisi fuori della metà; e conseguentemente in una porzione maggiore, ed in una minore.

Se dunque un triangolo ottusangolo è stato formato sopra due lati di due quadrati, ec.

Prop. XV. Teorema XV.

Figura XII.

Se un triangolo ottusangolo è stato formato sopra due lati di due quadrati, che sono innalzati sopra due lati di un triangolo equilatero: e se d' intorno ad uno dei quadrati colla metà della base del triangolo ottusangolo, colla metà della base del triangolo equilatero è stata completata una figura quadrilatera, e rettangola: e se finalmente i lati di tal figura sono stati di-

visi dagli angoli del quadrato: ne risulta che la figura esterna sarà un quadrato.

Se il triangolo ottusangolo KDA è stato formato sopra i due lati AD , AK dei due quadrati AH , AN , che sono stati innalzati sopra i lati AB , AC del triangolo ABC : e se d'intorno ad uno dei quadrati, e sia AH , che colla porzione TD della base KD , e colla porzione SB della base BC è stata completata la figura quadrilatera, rettangola OS ; e se finalmente i lati ST , TO , OP , PS della figura OS sono stati divisi dagli angoli del quadrato AH , io dico che la figura esterna OS sarà sempre un quadrato.

Poichè pel teorema antecedente, che i lati della figura rettangola, e quadrilatera OS vengono divisi dagli angoli del quadrato AH in una porzione maggiore, ed in una minore: essendo pel teorema II. che le maggiori sono eguali alle maggiori, le minori alle minori: essendo pel teorema quarto, che quando i lati sono divisi fuori della metà dagli angoli del quadrato interno, sarà sempre una tal figura un quadrato: conseguentemente la figura quadrilatera, e rettangola OS è un quadrato.

Se dunque un triangolo ottusangolo è stato formato, cc.

Prop. XVI. Teorema XVI.

Figura XII.

Se un triangolo ottusangolo è stato formato sopra due lati di due quadrati, che sono innalzati sopra due lati di un triangolo equilatero, ne risulta che col dimostrarsi il triangolo ottusangolo eguale al triangolo equilatero; sarà conseguentemente l'aia dell' uno eguale all' aia dell' altro.

Se il triangolo ottusangolo KDA è stato formato sopra i due lati AD , AK dei quadrati AH , AN , che sono stati innalzati sopra i lati AB , AC del triangolo equilatero ABC ; io dico che col dimostrarsi KDA eguale a BAC sarà conseguentemente l'aia di KDA eguale a quella di ABC .

Pel teorema XV. d' intorno al quadrato AH si forma il quadrato OS .

Poichè pel teorema III., che i triangoli che si formano dal quadrato interno, ed esterno sono tra loro eguali; così sarà il triangolo DTA eguale al triangolo ASB . Ma pel teorema XI, la perpendicolare ST per passare pel vertice A è stata innalzata dalla metà della base BC alla metà della base DK , e così n' avviene ancora che i triangoli KDA ABC restano divisi per metà, ed in tal modo non

solo il triangolo DTA è eguale ABS : ma bensì il triangolo KTA eguale al triangolo ACS : e conseguentemente tutto il triangolo KDA eguale a tutto il triangolo ABC : non che l'area di KDA eguale all'area di ABC.

Dunque se un triangolo ottusangolo è stato formato ; ec.

Prop. XVII. Teorema XVII.

Fig. XIII.

Se nell'interno di un parallelogrammo rettangolo v'è descritto un triangolo equilatero , in modo che un lato del parallelogrammo forma un lato del triangolo : e se l'angolo del triangolo opposto a questo lato comune ha toccato , e diviso per sua natura nella metà il lato del parallelogrammo , parimente opposto al lato comune : ne risulta che gli altri due piccioli triangoli che si sono formati a fianco del triangolo equilatero , saranno insieme presi eguali all'istesso triangolo equilatero , e conseguentemente l'area di questo è eguale all'area di quelli.

Se nell'interno del parallelogrammo rettangolo PC v'è descritto il triangolo equilatero ABC in modo che il lato BC del pa-

rallelogrammo PC forma un lato del triangolo ABC; e se l'angolo BAC ha toccato, e diviso per sua natura nella metà il lato PD: io dico che i due piccioli triangoli APB, ADC, che si sono formati a fianco del triangolo equilatero ABC, saranno insieme presi eguali all'istesso triangolo ABC; e conseguentemente l'aria di questo eguale all'aria di quelli.

Dalla metà della base BC, e propriamente dal punto S alla metà dell'angolo BAC s'innalza, per la def. I. la perpendicolare SA, che divide per metà tanto il parallelogrammo PC, quanto il triangolo ABC.

Poichè essendo per la costruzione PD, BC divisi per metà nei punti A, ed S: essendo per tal divisione il lato AD eguale al lato SC; e che AD si contiene nel picciolo triangolo ADC, ed SC nel picciolo triangolo CAS: essendo la perpendicolare SA eguale a CD; perchè inscritta nel parallelogrammo rettangolo PC; essendo finalmente AC comune, così sarà l'angolo ADC eguale all'angolo ASC; ed i rimanenti angoli eguali ai rimanenti angoli, e tutto il triangolo ADC, pel teor. III. eguale a tutto il triangolo ASC.

Similmente si dimostra, che essendo PA eguale a BS: essendo PB eguale ad AS; e poi AB comune: così sarà l'angolo ASB

eguale all' angolo APB, ed i rimanenti angoli eguali ai rimanenti angoli, ciascuno a ciascuno è tutto il triangolo APB eguale a tutto il triangolo ASB.

Ma ciascun triangolo ASC, ASB è metà di tutto il triangolo ABC: ed essendo che il triangolo ADC si è dimostrato eguale al triangolo ASC; ed il triangolo APB eguale al triangolo ASB: così n' avviene che i due triangoli ADC, APB insieme presi sono eguali a tutto il triangolo equilatero ABC: e conseguentemente sarà l' aia di questo eguale all' aie di quelli presi insieme.

Dunque se nell' interno di un parallelogrammo rettangolo, ec.

Prop. XVIII. Teorema XVIII.

Figura XIV.

Se dalle due estremità di un lato del quadrato si sono presi due centri di due cerchi: e se l' intervallo di essi è stato l' istesso lato del quadrato, e che le rispettive circonferenze per lor natura si sono intersecate nell' aia del quadrato: e se finalmente dai centri al punto d' intersecazione si sono tirate due linee oblique, che col lato del quadrato, hanno

formato un triangolo: ne risulta in primo luogo, che questo triangolo sarà equilatero. In secondo luogo, che la sua altezza è mancante relativamente a quella del quadrato di un'ottava, e di una sessantaquattresima.

Se dagli due estremi del lato AD si sono presi due centri di due cerchi, cioè A del cerchio SBD, e D del cerchio SCA: e se l'intervallo di essi è stato l'istesso lato AD, e che le circonferenze si sono per lor natura intersecate nell'aia del quadrato, e propriamente nel punto T: e se finalmente dai centri A, e D al punto T d'intersecazione si sono tirate due oblique linee AT, DT, che col lato AD del quadrato AC hanno formato il triangolo DAT: io dico in primo luogo, che DAT è un triangolo equilatero.

In secondo luogo che la sua altezza è mancante relativamente a quella del quadrato AC di un'ottava, e di una sessantaquattresima.

Poichè A è centro del cerchio SBD sarà AD eguale ad AT: similmente perchè D è centro del cerchio SCA sarà DA eguale a DT: sicchè all'istesso AD è eguale tanto AT, quanto DT, tolta la comune AD resterà AT eguale a DT; e conseguentemente DAT è triangolo equilatero.

Si dimostra in secondo luogo, che l'ol-

tezza del triangolo equilatero DAT è mancante relativamente a quella del quadrato AC di un'ottava, e di una sessantaquattresima.

Poichè essendo per la definizione IV. che i cerchi SBD^o, SCA s'intersecano nell' aia del quadrato AC nel punto T, che segna di altezza sei ottave, e sette sessantaquattresime: essendo che l'angolo ATD del triangolo DTA è nel punto T: così n'avviene, che l'altezza del triangolo DAT è di sei ottave, e sette sessantaquattresime.

Ma dal quadrato AC toltone sei ottave, e sette sessantaquattresime, resta un'ottava, ed una sessantaquattresima: e conseguentemente n'avviene, che l'altezza del triangolo equilatero DAT è mancante a quella del quadrato AC di un'ottava, e di una sessantaquattresima.

Dunque se dalle due estremità di un lato del quadrato, ec.

Prop. XIX. Teorema XIX.

Figura XV.

Se v'è descritto un triangolo ottusangolo sopra due lati di due quadrati, che sono innalzati sopra due lati di un triangolo equilatero: e se dagli estremi della base, che s'opponne all'angolo ottuso si sono innalzate due oblique linee eguali ad altre due del triangolo equilatero, o dei quadrati, e queste con essere state inclinate in un punto hanno formato coll'istessa base un'altro triangolo: ne risulta che questo triangolo sarà simile, ed eguale al triangolo ottusangolo.

Se v'è descritto un triangolo ottusangolo PDA sopra i due lati AD, AP dei due quadrati AH, AS, che sono stati innalzati sopra due lati del triangolo equilatero ABC: e se dagli estremi della base DP, che s'opponne all'angolo ottuso DAP sono state innalzate due oblique linee DT, PT eguali ad altre due del triangolo equilatero, o dei quadrati AH, AS con essere state inclinate nel punto T hanno formato colla base DP il triangolo TDP: io dico che TDP sarà simile, ed eguale al triangolo ottusangolo PDA.

Poichè le rette DT, PT sono eguali a DA,

PA del triangolo PDA : la base DP è comune : così non solo sarà l'angolo DTP eguale all'angolo ottuso DAP : ma bensì i rimanenti angoli eguali ai rimanenti angoli : e conseguentemente sarà tutto il triangolo TDP simile , ed eguale a tutto il triangolo PDA.

Dunque se v' è descritto un triangolo ottusangolo , ec.

Prop. XX. Teorema XX.

Figura XVI.

Se sopra un triangolo ottusangolo , ch'è descritto sopra due lati di due quadrati , che sono innalzati sopra due lati di un triangolo equilatero , v' è innalzato un altro triangolo ottusangolo : e se i triangoli ottusangoli uniti insieme , sono stati divisi con essersi tirata una retta da un'angolo ottuso all'altro : ne risulta che questa retta metù appartiene ad un triangolo , e metà all'altro ; e conseguentemente una metà , è eguale all'altra.

Se sopra il triangolo ottusangolo PDA , ch'è descritto sopra due lati AD, AP dei due quadrati AH , AS , che sono innalzati sopra i lati del triangolo ABC , v' è formato un altro triangolo ottusangolo TPD : e se i due trian-

goli uniti insieme sono stati divisi per essersi tirata la retta TA da un'angolo ottuso all'altro: io dico che questa retta, metà appartiene a TDP, e metà a PDA: e conseguentemente una metà è eguale all'altra.

Poichè pel teorema antecedente TDP è simile ed eguale a PDA: così quell'altezza, che il triangolo TDP ha dall'angolo ottuso T alla base comune DP, quell'istessa il triangolo PDA avrà dall'angolo ottuso A all'istessa DP.

Ma da T ad A è stata tirata la retta TA: così TA metà appartiene ad un triangolo, e metà all'altro; e conseguentemente la porzione TK è eguale alla porzione KA.

Se dunque sopra un triangolo ottusangolo, ec.

Prop. XXI. Teorema XXI.

Figura XVII.

Se sopra un triangolo ottusangolo, ch'è descritto sopra due lati di due quadrati, che sono innalzati sopra due lati di un triangolo equilatero, v'è innalzato un altro triangolo ottusangolo; e se i due triangoli ottusangoli uniti insieme sono stati divisi con essersi tirata una retta da un'angolo

*ottuso all' altro ; ne risulta che per tal divisione i due triangoli ottusangoli hanno formato due triangoli equilateri , e che uniti insieme costituiscono il rombo. **

Se sopra il triangolo ottusangolo PDA, che è descritto sopra i due lati AD ; AP de' quadrati AH , AS , che sono innalzati sopra i lati del triangolo equilatero ABC , v' è innalzato un' altro triangolo ottusangolo TDP : e se i triangoli ottusangoli uniti insieme sono stato divisi con essere stata tirata la retta TA da un' angolo ottuso all' altro : io dico che con tal divisione , i due triangoli ottusangoli TDP , PDA hanno formati due triangoli equilateri TDA , TPA , e che uniti insieme hanno costituito il rombo PTDA.

Colla porzione DK , e colla porzione KA si vada a completare pel teor. XV. il quadrato GN.

Poichè , pel teor. II. la porzione minore KA è eguale alla minore BN. Pel teor. antecedente TK è eguale a KA. Pel teor. XI. per dimostrare , che la perpendicolare NK è passata pel vertice A si è detto che BC è stata divisa per metà nel punto N : così quella ragione , che ha KA con BN , quell' istessa avrà TK con NC : e conseguentemente la tutta TA è eguale alla tutta BC : i lati poi TD , DA per tante dimostrazioni

sono eguali ai lati AB , AC . E quando in due triangoli i lati di uno sono eguali a lati dell'altro, n'avviene che saranno gli angoli sguai agli angoli, e tutto il triangolo a tutto il triangolo: e così TDA sarà simile, ed eguale ad ABC .

Ma il triangolo ABC è triangolo equilatero, così ancora TDA sarà triangolo equilatero.

Di vantaggio essendo TP eguale a TD ; non che AP eguale ad AD : e poi AT comune: così avremo gli angoli del triangolo TPA eguale agli angoli del triangolo TDA , e tutto TPA a tutto TDA .

Ma il triangolo TDA si è dimostrato triangolo equilatero: così TPA sarà parimente triangolo equilatero, e che uniti insieme per la definizione VI. formano il rombo $PTDA$.

Dunque se sopra ad un triangolo ottusangolo, ec.

Prop. XXII. Teorema XXII.

Figura XVIII.

Se sopra i tre lati del triangolo equilatero vi sono descritti tre quadrati, ed a fianco de' quali vi sono formati tre rombi, in modo che vien formata una figura nona - equilatera: ne risulta che questa figura è egua-

le a cinque quadrati, sei ottave, quattro sessantaquattresime, cinque ottave di una sessantaquattresima; e quattro sessantaquattresime di quest'ultima ottava.

Se sopra i lati del triangolo ABC vi sono formati tre quadrati AH, AS, CO, ed a fianco de' quali vi sono descritti tre rombi TA, BN, CV, in modo che vien formata la figura nona-equilatera THOS: io dico che questa figura è eguale a cinque quadrati, sei ottave, quattro sessantaquattresime, cinque ottave di una sessantaquattresima, e quattro sessantaquattresime di quest'ultima ottava.

Poichè per la def. VII. essendo l'aia del rombo mancante all'aia del quadrato di un'ottava, quattro sessantaquattresime, e tre ottave di una sessantaquattresima: ed essendo tre rombi nella figura THOS: così avremo quattro ottave, cinque sessantaquattresime, ed un'ottava: e per essere il triangolo equilatero ABC la metà del rombo: così sarà mancante di sei sessantaquattresime, un'ottava di una sessantaquattresima, e quattro sessantaquattresime seconde; e che unite le mancanze dei rombi con quelle del triangolo equilatero ABC, ascendono a cinque ottave di un quadrato, tre sessantaquattresime, due ottave di una sessantaquattresima, e quattro sessantaquattresime di quest'ultima ottava.

E poi tutta la figura THOS composta di un triangolo equilatero ABC: di tre quadrati AH, AS, CO: e di tre rombi TA, BN: CV: e considerata la somma dei rombi col triangolo equilatero senza mancanze, ed unita a quella dei quadrati ascende a sei quadrati, e quattro ottave: da ciò toltone le mancanze dei rombi, e del triangolo equilatero ABC, che sono cinque ottave di un quadrato, tre sessantaquattresime, due ottave di una sessantaquattresima, e quattro sessantaquattresime di quest'ultima ottava, restano cinque quadrati, sei ottave, quattro sessantaquattresime, cinque ottave di una sessantaquattresima, e quattro sessantaquattresime di quest'ultima ottava: onde tutta l'area della figura nona-equilatera THOS sarà eguale a quella di cinque quadrati, sei ottave, quattro sessantaquattresime, cinque ottave di una sessantaquattresima, e quattro sessantaquattresime di quest'ultima ottava. 5 $\frac{6}{8}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{4}{16}$.

Se dunque sopra i tre lati del triangolo equilatero vi sono descritti, ec.

Figura XIX.

Se da sopra i lati del dodicaono vi sono formati dodeci triangoli equilateri, e da sopra i lati dei triangoli vi sono formati dodici quadrati: e se da sopra i lati dei quadrati, con prenderne due, e lasciarne due altri, (e così per sei volte) si sono innalzate sei figure none-equilateri: e se da sopra i rimanenti lati dei quadrati, ed a fianco alle figure none-equilateri si sono innalzati sei esaoni; e se finalmente da sopra agli esaoni, ed a fianco parimente alle figure none-equilateri vi sono innalzate sei spurie figure settime-equilateri, in modo che si è completata una trentasei-uona, è mirabile piramide, ne risulta che la sua aia verrà divisa in quarantotto quadrati, e cinquantaquattro rombi; e che ridotti i rombi a quadrati: tutta l'aia sarà eguale a novantuno quadrati, quattro ottave, tre sessantaquattresime, e sei ottave di una sessantaquattresima.

Se da sopra i lati del dodicaono ABC vi sono formati dodeci triangoli equilateri, e da sopra i lati dei triangoli vi sono formati dodici quadrati: e se da sopra i lati dei qua-

drati con prenderne due, e lasciarne due altri (e così per sei volte) si sono innalzate sei figure none - equilaterè D , E , F , G , H , K : e se da sopra i rimanenti lati dei quadrati , ed a fianco alle figure none - equilaterè vi sono innalzati sei esaoni L , M , N , O , P , Q : e se finalmente da sopra gli esaoni , ed a fianco parimente alle figure none - equilaterè vi sono innalzate sei spurie figure settime - equilaterè R , S , T , V , X , Z , in modo che si è completata una trentasei - aona , e mirabile piramide ; io dico che la sua aia verrà divisa in quarantotto quadrati , e cinquantaquattro rombi ; e che ridotti i rombi a quadrati , tutta l' aia sarà eguale a novantuno quadrati , quattro ottava , tre sessantaquattresime , e sei ottave di una sessantaquattresima .

Poichè , per la def. XIII. , essendo sei quadrati nel dodicaono ABC ; non che altri dodici da sopra i lati dei triangoli equilateri : essendo che ve ne sono diciotto nelle sei figure none - equilaterè D , E , F , G , H , K : perchè per la def. IX. , ciascuna ne abbraccia tre : essendo che altri dodici ne sono nelle sei spurie figure settime equilaterè R , S , T , V , X , Z ; perchè per la def. X. ciascuna ne abbraccia due : così tutta la somma ascende a quarantotto quadrati .

Inoltre essendo che due triangoli equilateri per la def. VI., formano il rombo: essendo che nell'esaono YI&, per la def. XII, vi sono sei triangoli equilateri; e che nel dodicaono ABC, per la def. XIII. ve ne sono altri sei; non che dodici sopra i suoi lati, in modo che tutta la somma dei triangoli è eguale a dodici rombi: essendo che nelle sei figure none-equilateri D, E, F, G, H, K, per la def. IX. vi sono ventuno rombi, con calcolarsi i triangoli equilateri: essendo che altri diciotto ne formano gli esaoni L, M, N, O, P, Q: essendo che altri tre ne compongono li sei triangoli equilateri delle sei spurie figure settime equilateri R, S, T, V, X, Z: così tutta la somma ascende a cinquantaquattro rombi: e conseguentemente tutta l'aia della piramide vien divisa in quarantotto quadrati, e cinquantaquattro rombi.

Di vantaggio essendo che l'aia del rombo relativamente all'aia del quadrato, per la def. VIII., è mancante di un'ottava, quattro sessantaquattresime, e tre ottave di una sessantaquattresima: essendo che per tale def. le mancanze di tutta la somma di cinquantaquattro rombi ascendono a dieci quadrati, tre ottave, quattro sessantaquattresime, e due ottave di una sessantaquattresima: essendo

che da cinquantaquattro rombi si tolgono queste mancanze; così restano quarantatre quadrati, quattro ottave, tre sessantaquattresime, e sei ottave di una sessantaquattresima. Aggiuntovi a quest'ultima somma altri quarantotto quadrati, che sono senza mancanze: n'avviene che tutta l'aria della piramide è eguale a novantuno quadrati, quattro ottave, tre sessantaquattresime, e sei ottave di una sessantaquattresima.

Dunque se da sopra i lati del dodicaono vi sono formati, ec.

Corollario.

Se d'intorno alla piramide l'uno dopo l'altro si aggiungono sei, o sette gradi sferici (composto ciascun grado di quadrati, rombi, e triangoli equilateri) essa piramide presenterà bocce, albori, fiori, ed altre cose che vi si osservano.

LIBRO II.

DEFINIZIONI.

I.

Nei parallelogrammi ottusangoli la diagonale, che s'opponc agli angoli ottusi è maggiore di uno dei lati maggiori.

II.

Nei parallelogrammi ottusangoli due parallele sono orizzontali, ossia rette; e due oblique.

III.

Se due rette linee formano angolo da una parte; e se dagli estremi dell'altra parte si avvicinano a poco a poco: ne risulta, che a misura che si avvicinano a quell'istessa ragione vanno ad unirsi nella parte angolare.

Figura XX.

Si dice che se due parallelogrammi sono sopra l'istessa base, e tra l'istesse parallele sono eguali tra di loro.

Eccone la dimostrazione.

Se due parallelogrammi AD , TB sono tra l'istesse parallele BD , AT , e sopra l'istessa base BD ; io dico che sono tra loro eguali.

Poichè essendo AT parallela a BD : essendo che i parallelogrammi AD , TB sono basati sopra BD : così BD sarà eguale tanto ad AC , quanto a CT , e conseguentemente AC , CT sono tra loro eguali.

Di vantaggio essendo AD , TB parallelogrammi; i rimanenti lati paralleli AB , CD sono tra loro eguali; non che tra loro eguali i rimanenti lati CB , TD . Ed avendo il lato AC eguale a CT ; il lato AB eguale a CD ; il lato CB eguale a TD ; così avremo il triangolo CAB eguale al triangolo TCD : aggiunto il comune CBD sarà conseguentemente il parallelogrammo AD eguale al parallelogrammo TB .

Questa dimostrazione è falsa, perchè i parallelogrammi non possono avere l'istessa ba-

se : come con evidenza faremo conoscere nel presiegno delle dimostrazioni , ec.

Prop. I. Teorema I.

Figura XXI.

Se due parallelogrammi sono tra l'istesse parallele , e che si credono sopra l'istessa base ; e se la parallela opposta alla base si allungata di quanto è la base , e si è formato sopra l'istessa base , è tra la porzione allungata il terzo parallelogrammo : ne risulta , che la parallela laterale di questo terzo parallelogrammo si è avvicinata alla base di più di quello che non è la parallela laterale del secondo parallelogrammo.

Se due parallelogrammi AD , OD sono tra l'istesse parallele AT , BD ; e che si credono sopra l'istessa base BD ; e se la parallela AT si è allungata di quanto è la base BD in modo che si è formato il terzo parallelogrammo VB : io dico che la parallela laterale TB del terzo parallelogrammo VB si è avvicinata alla base BD più di quello che non si è avvicinata la parallela laterale OB del secondo parallelogrammo OD.

Poichè essendo che per costruire il terzo

parallelogrammo BV tra BD, e TV si è dovuta la sua parallela laterale BT per necessità tirare dall'estremità della base BD, e propriamente dal punto B, ed è andata anche per necessità a terminare nel punto T: (dove è finita la porzione OT che appartiene al secondo parallelogrammo OD, ed è principiata la porzione TV, che appartiene al terzo parallelogrammo BV) e così n'è avvenuto, che BT è divenuta diaonale del parallelogrammo OD, e come tale, l'intera aia di OD vien divisa in due porzioni BTO, BTD (1): e conseguentemente BT relativamente a BO si è avvicinata di più verso la base BD di quanto è la porzione NS della parallela CD.

Ma BO appartiene al secondo parallelogrammo OD: e BT al terzo parallelogrammo BV. Dunque la parallela laterale del terzo parallelogrammo è più vicina alla base di quella che non è la parallela laterale del secondo.

Dunque se due parallelogrammi ec.

(1) In questo caso non è necessario il dire, che la diaonale BT divide in due eguali porzioni l'aia del parallelogrammo OD.

Prop. II. Teorema II.

Figura XXII.

Se due parallelogrammi sono tra l'istesse parallele, e che si credono sopra l'istessa base: e se la parallela opposta alla base si è allungata di altro tanto di quanto è la base, e si è formato sopra l'istessa base, e tra la porzione allungata il terzo parallelogrammo; e se finalmente nella porzione allungata vi sono altri due parallelogrammi; il primo simile, ed eguale al primo; il secondo simile, ed eguale al secondo: ne risulta che il terzo parallelogrammo sarà comune, e può considerarsi tanto formato sopra la base, quanto formato nella porzione allungata: e conseguentemente tre parallelogrammi saranno sopra la base, e tre parallelogrammi nella porzione allungata.

Se due parallelogrammi AD , OB sono tra l'istesse parallele AT , BD , e che si credono sopra l'istessa base BD : e se la parallela AT si è allungata di quanto è la base BD , in modo che si è formato il terzo parallelogrammo VB : e se finalmente nella porzione allungata TV vi sono altri due parallelogrammi; il primo TG simile, ed eguale

al primo AD ; il secondo TX simile , ed eguale al secondo OD : io dico che il terzo parallelogrammo VB resterà comune e può considerarsi tanto formato sopra la base BD , quanto nella porzione allungata TV ; e conseguentemente tre parallelogrammi verranno formati sopra la base BD , cioè AD , OD , BV ; e tre parallelogrammi nella parte opposta TV , cioè TG , TX , VB.

Poichè essendo TG simile , ed eguale ad AD : essendo TX simile , ed eguale ad OD ; così VB verrà formato dal triangolo TDV , che appartiene al parallelogrammo TX ; e dal triangolo TBD , che appartiene al parallelogrammo OD : e perciò VB può considerarsi come terzo parallelogrammo formato sopra la base BD , e come terzo parallelogrammo formato nella porzione allungata TV : e conseguentemente tre parallelogrammi vi saranno sopra la base BD , cioè AD , OD , VB , non che tre parallelogrammi nella parte opposta , ossia nella porzione allungata TV , cioè TG , TX , VB , ec.

Figura XXII.

Un parallelogrammo essendo ottusangolo: ne risulta che a quel modo, che una parallela laterale si è avvicinata alla base, a quell'istesso modo la seconda parallela laterale si sarà parimente avvicinata alla parallela opposta alla base.

Essendo VB parallelogrammo ottusangolo: ne risulta che, a quel modo, che la parallela laterale TB si è avvicinata alla base BD; a quell'istesso modo, io dico, la seconda parallela laterale DV si sarà parimente avvicinata alla parallela TV opposta alla base BD.

Siano costruiti tanto sopra BD, quanto nella parallela TV l'istessi parallelogrammi che sono nella figura del teorema antecedente, cioè AD simile ed eguale a TG, ed OD simile ed eguale a TX.

Poichè, pel teorema antecedente, essendo il parallelogrammo TG simile ed eguale al parallelogrammo AD; ed il parallelogrammo TX simile, ed eguale al parallelogrammo OD; ed VB comune tanto da una parte, quanto dall'altra: così a quel modo, ed in quei punti, che le parallele OB, TB intersecano la parallela CD; a quell'istesso modo, ed

in quell' istessi punti le parallele XV , DV intersecheranno la parallela TD : e conseguentemente non solo la porzione NS è eguale alla porzione KH : ma bensì la porzione SD , è eguale ad HP.

Ed essendo pel teorema primo la parallela TB relativamente alla parallela OB si è avvicinata di più verso la base BD di quanto è la porzione NS : così all' istesso modo la parallela DV relativamente ad XV si è avvicinata di più verso TV di quanto è KH , la quale si è dimostrata eguale ad NS.

Ma TB è la prima parallela laterale del parallelogrammo VB ; ed VD è la seconda parallela laterale dell' istesso parallelogrammo : conseguentemente in quella distanza che una parallela laterale si avvicina alla base all' istessa ragione, la seconda parallela laterale si avvicina alla parallela opposta alla base , ec.

Prop. IV. Teorema IV.

Figura XXIII.

Se due parallelogrammi ottusangoli sono tra l' istesse parallele , e che si credono sopra l' istessa base : ne risulta , che le parallele laterali ed oblique del secondo parallelogrammo sono maggiori di quelle del

primo, e conseguentemente ancora più oblique.

Se due parallelogrammi ottusangoli AC : TV sono tra l'istesse parallele BC , AT ; e che si credono sopra l'istessa base BC : io dico che le parallele laterali , ed oblique DB , TC del secondo parallelogrammo TB sono maggiori di quello del primo , cioè di AB , DC , e conseguentemente più oblique.

Poichè nel teorema primo (per dimostrare che la parallela laterale del terzo parallelogrammo si avvicina più alla base di quello che non si avvicina la parallela laterale del secondo) si è detto che la parallela laterale DB del parallelogrammo TB è divenuta diaonale del parallelogrammo AC ; e perciò sarà la diaonale DB maggiore della parallela laterale AB : perchè nel parallelogrammo ottusangolo , per la definizione I. la diaonale, che s'opponne agli angoli ottusi è maggiore del lato maggiore.

Ma la parallela DB s'opponne a TC ed alla parallela AB s'opponne DC : così anche TC sarà maggiore di DC : e perciò le parallele laterali DB TC del secondo parallelogrammo TB sono maggiori delle laterali AB , DC del primo parallelogrammo AC ; e conseguentemente ancora più oblique quelle del secondo di quelle del primo , &c.

Corollario I.

E se tra l' istesse parallele , e come si crede sopra l' istessa base si costruisce un terzo parallelogrammo , e poi un quarto : ne risulta che sempre le parallele laterali dell' ultimo sono più lunghe di quelle del suo antecedente

Corollario II.

Essendo che le parallele laterali del secondo parallelogrammo sono maggiori delle parallele laterali del primo : n' avviene che il secondo parallelogrammo è più lungo del primo.

*Prop. V. Teorema V.**Figura XXIV.*

Se due parallelogrammi sono tra l' istesse parallele , e che si credono sopra l' istessa base : e se la parallela opposta alla base si è allungata di quanto è la base : e se si è formato sopra l' istessa base e tra la porzione allungata il terzo parallelogrammo : ne risulta che a quella proporzione che una parallela del terzo parallelogrammo si av-

vicina alla base : a quell' istessa ragione la parallela opposta va a ribassarsi nella parte esterna.

Se due parallelogrammi AD , TB sono tra l' istesse parallele AT , BD , e che si credono sopra l' istessa base, BD : e se la parallela AT si è allungata di quanto è la porzione TV eguale alla base BD in modo che si è formato il terzo parallelogrammo VB : io dico che a quella proporzione, che la parallela TB del terzo parallelogrammo VB si avvicina alla base BD a quell' istessa ragione la parallela opposta VD va a ribassarsi nella parte esterna.

Si allunga la parallela BD della porzione DX di quanto è l' istessa BD ; e dal punto X s' innalza XG parallela a CD in modo che si forma il parallelogrammo GD eguale ad AD .

Poichè essendo VD parallela a TB : essendo pel teorema primo che TB relativamente ad OB si è avvicinata di più verso BD di quanto è la porzione NS della parallela GD : così all' istessa proporzione VD relativamente a TD si è avvicinata di più verso a DX di quanto è la porzione PI eguale ad NS .

Ma VD è parallela opposta a TB , e che entrambi appartengono al terzo parallelogram-

mo VB, e la parallela TD è opposta ad OB, e che entrambi appartengono al secondo parallelogrammo OD. Dunque a quella ragione che la parallela TB del terzo parallelogrammo VB si è avvicinata alla base BD a quell'istessa proporzione la parallela opposta VD si è ribassata nella parte esterna, ec.

Prop. VI. Teorema VI.

Figura XX.

Se due parallelogrammi sono tra l'istesse parallele, e che si credono sopra l'istessa base: ne risulta che il secondo parallelogrammo sarà sempre ottusangolo; abbenchè il primo sia rettangolo.

Siano due parallelogrammi AD, TB tra l'istesse parallele AT, BD, e che si credono sopra l'istessa base BD: io dico che il secondo parallelogrammo TB sarà sempre ottusangolo; abbenchè il primo AD sia rettangolo.

Poichè essendo AD parallelogrammo rettangolo, sarà l'angolo ACD retto. E poi l'angolo TCD parimente retto, perchè angolo esteriore all'angolo ACD: e l'angolo TCD è parte dell'angolo TCB: così n'avviene che l'angolo TCD è ottuso perchè maggiore del

retto di quanto è l'angolo BCD : ed essendo TCB ottuso sarà l'angolo opposto TDB parimente ottuso. Ma entrambi gli angoli TCB, TDB appartengono al parallelogrammo TB : conseguentemente il parallelogrammo TB sarà sempre ottusangolo ; abbenchè AD sia rettangolo , ec.

Prop. VII. Teorema VII.

Figura XXIII.

Se due parallelogrammi ottusangoli sono tra l'istesse parallele , e che si credono sopra l'istessa base : ne risulta che gli angoli del secondo parallelogrammo sono più ottusi di quelli del primo.

Se due parallelogrammi ottusangoli AC , TB sono tra l'istesse parallele AT , BC , e che si credono sopra l'istessa base BC : io dico che gli angoli TCD , TDB del secondo parallelogrammo TB sono più ottusi degli angoli DCB , DAB del primo parallelogrammo TB.

Poichè essendo AT parallela a BC , ed AB parallela a DC : così avremo l'angolo DAB eguale all'angolo TDC. E poi l'angolo TDB maggiore dell'angolo TDC di quanto è l'angolo CDB : così l'istesso TDB è maggiore

dell'angolo DAB di quanto è l'angolo CDB. Ma l'angolo maggiore TDB appartiene al secondo parallelogrammo TB; e l'angolo minore DAB appartiene al primo parallelogrammo AC: conseguentemente l'angolo ottuso del secondo parallelogrammo è più ottuso di quello del primo.

Di vantaggio l'angolo TCB è maggiore dell'angolo DCB di quanto è l'angolo TCD. Ma TCB appartiene al secondo parallelogrammo TB; e DCB appartiene al primo parallelogrammo AC: conseguentemente gli angoli ottusi del secondo parallelogrammo sono più ottusi di quelli del primo, ec.

Corollario.

Poichè essendo, che il secondo parallelogrammo ha gli angoli ottusi più di quelli del primo: così il terzo gli avrà più ottusi del secondo: il quarto più del terzo ec. fino a che ciascun angolo verrà a distruggersi, e conseguentemente di due linee se ne formerà una sola.

Figura XXII.

Se due parallelogrammi sono tra l'istesse parallele, e che si credono sopra l'istessa base: e se la parallela opposta alla base si è allungata di altro tanto di quanto è la base, e si è formato sopra l'istessa base, e tra la porzione allungata il terzo parallelogrammo: e se finalmente nella porzione allungata vi sono altri due parallelogrammi; il primo simile, ed eguale al primo; il secondo simile, ed eguale al secondo; ed il terzo comune tanto da una parte quanto dall'altra: ne risulta che questo terzo è menq largo di uno dei secondi.

Se due parallelogrammi AD , OD sono tra l'istesse parallele AT , BD , e che si credono sopra l'istessa base BD : e se la parallela AT si è allungata di quanto è la base BD in modo che si è formato il terzo parallelogrammo VB : e se finalmente nella porzione allungata TV vi sono altri due parallelogrammi; il primo TG simile, ed eguale al primo AD , il secondo TX simile, ed eguale al secondo OD : ed il terzo VB comune tanto sopra BD , quanto nella porzione allungata TV : io dico che questo terzo pa-

rallelogrammo VB è meno largo tanto del solo OD, quanto del solo TX.

Poichè, pel teorema primo, la parallela TB relativamente alla parallela OB si è avvicinata di più verso la base BD di quanto è la porzione NS della parallela CD: All'istesso modo, pel teorema III., la parallela VD relativamente ad VX si è avvicinata di più verso TV di quanto è la porzione KH eguale ad NS.

Ma le parallele TB, VD avvicinate a BD, TV appartengono al terzo parallelogrammo VB: e la parallela OB al parallelogrammo OD: e la parallela VX al parallelogrammo TX: così n'avviene, che VB sarà meno largo tanto del solo OD di quanto è NS, quanto del solo TX di quanto è KH, ec.

Corollario.

Essendo il terzo parallelogrammo meno largo del secondo: così sarà il quarto meno largo del terzo; ed il quinto meno largo del quarto ec. fino a che verrà a distruggersi la larghezza.

Figura XXV.

Se tra due parallele orizzontali vuol formarsi un parallelogrammo ottusangolo : e che le parallele oblique del parallelogrammo hanno una irregolar lunghezza, relativamente alla distanza delle parallele orizzontali, ed alla larghezza della base : ne risulta che un tale parallelogrammo non può mai costruirsi, e che i supposti quattro lati del parallelogrammo non formano, che una sola linea.

Se tra due parallele orizzontali AE , BZ vuol formarsi un parallelogrammo ottusangolo BE : e che le parallele oblique BP , DE del parallelogrammo BE hanno una irregolar lunghezza relativamente alla distanza QF , che hanno le parallele AE , BZ ; ed alla larghezza della base BD : ne risulta che un tal parallelogrammo BE non può mai costruirsi, e che i supposti quattro lati BP , PE , ED , DB non formano, che la sola linea BE .

Sopra la base BD che volea formarsi il parallelogrammo BE si abbiano per costruiti tre parallelogrammi AD , OD , BV , all'istesso modo che sono nel teorema primo : e dall'altra parte opposta, e propriamente in

PE vi siano anche costruiti tre parallelogrammi EM, PX, PZ, simili ed eguali a quelli che sono sopra BD, cioè ciascuno a ciascuno.

Poichè essendo, pel teorema VII., che l'angolo BTV del terzo parallelogrammo BV è più ottuso dell'angolo BOT del secondo parallelogrammo OD; ed essendo per il corollario dell'istesso teorema, che l'angolo del quarto parallelogrammo sarà più ottuso dell'angolo del terzo; e l'angolo del quinto più ottuso di quello del quarto ec. fino a che, per il corollario del teorema VII., l'angolo verrà a distruggersi: così n' avviene che della linea obliqua BP, e della base PE, in dove si è distrutto l'angolo BPE, si è formata la sola linea BE. All'istesso modo nella parte opposta, che della linea obliqua ED, e della base BD si è formata la sola EB (1).

Ed essendo pel teorema primo che BT relativamente a BO si è avvicinata di più verso la base BD di quanto è NS della parallela CD; e che BT appartiene al terzo parallelogrammo BV; e BO al secondo OD: ed essendo pel teorema III. che EL relativamente ad EX si è avvicinata ad EP di quanto è la porzione KH della parallela PY;

(1) EB si è presa due volte ad oggetto di farne la dimostrazione.

e che EL appartiene al terzo parallelogrammo EM , ed EX al secondo PX : ed essendo finalmente, che per tali avvicinamenti, pel teorema antecedente, BV è meno largo di OD , ed EM di PX : così n' avviene, che quanto più si aggiungono parallelogrammi l'uno dopo l'altro tra l'istesse parallele sempre l'ultimo sarà meno largo del suo antecedente. E con questa aggiunzione verrà conseguentemente, pel corollario del teorema antecedente, a distruggersi la larghezza.

Or dunque atteso la distruzione degli angoli; atteso la distruzione della larghezza del parallelogrammo: n' avviene, che il parallelogrammo BE che volea formarsi tra le parallele orizzontali, e propriamente sopra BD , in PE colle parallele oblique BP , DE non si è potuto costruire: perchè BP , DE sono di una irregolar lunghezza relativamente alla distanza QF , che hanno le paralleli orizzontali AE , BZ ; e relativamente ancora alla larghezza della base BD in PE : e conseguentemente non solo le due oblique parallele BP , DE hanno distrutto gli angoli BPE , EDB (e che BP colla sola base PE ha formato una sola linea BE ; ed ED colla base BD ha parimente formato la sola BE) ma bensì dei quattro lati BP , PE , ED , DB se n'è formato la sola linea BE ad og-

getto di essere stata distrutta parimente la larghezza, ec.

Prop. X. Teorema X.

Figura XXV.

Se tra due parallele orizzontali non può formarsi un parallelogrammo ottusangolo, qualora le parallele oblique sono di una lunghezza irregolare relativamente alla distanza delle parallele orizzontali, ed alla larghezza della base: né risulta che le parallele oblique (che di due se n'è formata una sola) in ambi gli estremi vanno ad unirsi colle orizzontali del doppio della base.

Se tra due parallele orizzontali AE, BZ non può formarsi un parallelogrammo, qualora le parallele BP, DE sono di una lunghezza irregolare relativamente alla distanza QF, che hanno le parallele AF, BZ, ed alla larghezza della base BD: io dico che le parallele oblique (che di due se n'è formato una sola) in ambi gli estremi vanno ad unirsi colle orizzontali del doppio di BD e PE.

Sopra la base BD si abbiano per costruiti AD, OD, VB all'istesso modo, che sono nel teorema antecedente. E dall'altra parte in PE siano anche costruiti tre parallelogrammi.

ni EM , PX , PZ simili ed eguali a quelli che sono sopra BD . Di vantaggio si prenda in BZ la porzione DS eguale a BD , e con innalzare dal punto S la retta SN parallela a CD si viene a costruire CS simile, ed eguale ed AD . Similmente si prenda in AE la porzione PK eguale a PE , e con innalzare dal punto K la retta KH viene a costruirsi PK simile, ed eguale a PZ .

Poichè, pel teorema quinto, la parallela VD relativamente a TB si è avvicinata verso la base DS di quanto BT verso BD : così, pel teorema antecedente, n' avviene che essendosi unita BP nel punto D dove termina la base BD , verrà ancora ad unirsi DE nel punto S dove termina la base DS .

Ma per l'istesso teorema antecedente, BP colla base BD si sono unite in modo che hanno formato la sola parallela BP ; così n' avviene che essendosi BP unita colla base BD nel punto D all'istesso modo la parallela opposta DE si sarà egualmente ribassata nel punto S ch'è il doppio della base BD . All'istesso modo si dimostra nell'altro estremo.

E conseguentemente se tra due, ec.

Prop. XI. Teorema XI.

Fig. XXI.

Se due parallelogrammi sono tra due parallele, non possono affatto costruirsi sopra l'istessa base.

Se due parallelogrammi OD, VB sono tra l'istesse parallele OV, BD, non possono affatto costruirsi sopra l'istessa base BD.

Si costruisca sopra la base BD il parallelogrammo AD; e propriamente dal punto in cui principia la parallela BO del parallelogrammo OD; e dal punto in cui principia la parallela opposta TD dell'istesso parallelogrammo DO; e che un tale parallelogrammo vien a formare due triangoli BSD, BND, oltre del trapezio AN, che non bisogna.

Poichè essendo pel teorema primo che la parallela BT relativamente a BO si è avvicinata di più verso la base BD di quanto è la porzione NS: così n'avviene che nei due triangoli BSD, BND, i due lati BS, BD del triangolo BSD, nella formazione dell'angolo DBS si sono inclinati e propriamente per la definizione III. del primo libro, e per la definizione III. di questo, si sono uniti di una porzione maggiore nella parte angolare, di quello che non si sono uniti i lati

BN, BD del triangolo BND nella formazione dell'angolo DBN; perchè la base DS è minore della base DN di quanto è NS: e conseguentemente l'angolo DBS è meno alto dell'angolo DBN.

Ed essendo che l'angolo DBS è meno alto dell'angolo DBN: così n'avviene che la base che s'opponè all'angolo BSD è minore della base, che s'opponè all'angolo BND (1).

Ma BN è porzione di BO, che appartiene al parallelogrammo OD: e BS è porzione di BT, che appartiene al parallelogrammo BV. Dunque la base del parallelogrammo BV è minore della base del parallelogrammo OD: e conseguentemente se due parallelogrammi sono tra l'istesse parallele, non possono affatto costruirsi sopra l'istessa base, ec.

(1) Si avrebbe dovuto con una lettera distinguere la base dell'angolo BSD, da quella dell'angolo BND: ma ciò non può farsi; ma dee concepirsi colla mente.

Prop. XII. Teorema XII.

Figura XXVI.

Abbenchè due parallelogrammi , che sono tra due parallele non possono costruirsi sopra l' istessa base : pure la base dell' uno è eguale alla base dell' altro.

Abbenchè i due parallelogrammi OD. VB, che sono tra le due parallele OV , BD non possono costruirsi sopra l' istessa base BD : pure la base di OD è eguale alla base di VB.

Si prolunga la base BD verso S , è da DS se ne prenda la porzione DX eguale a BD, e sopra BD , DX si costruiscono i due parallelogrammi AD , CX simili , ed eguali a quelli che sono nel teorema quinto , in modo che la parallela AG vada ad unirsi con OV nel punto O.

Poichè , pel teorema quinto , la parallela VD si è avvicinata verso DX a quell' istessa proporzione , che DB si è avvicinata verso BD : così n' avviene , che a quella ragione , che TB si è unita con BD nella parte angolare , a quell' istessa proporzione VD si è unita con DX nell' angolo VDX ; e conseguentemente quella picciola porzione di base , che il parallelogrammo VB ha perduto nell' inclinazione dell' angolo TBD , di altro tanto ne

ha acquistato nell'angolo VDX : e così dunque la base del parallelogrammo VD è eguale a quella del parallelogrammo OD .

Dunque abbenchè due parallelogrammi ec.

Prop. XIII. Problema I.

Fig. XXVII.

Dato sia un parallelogrammo ottusangolo, è d' uopo dividerlo in un parallelogrammo rettangolo, ed in due triangoli parimente rettangoli.

Dato sia il parallelogrammo ottusangolo AD è d' uopo dividerne in un parallelogrammo rettangolo, ed in due triangoli parimente rettangoli.

Dall' angolo ottuso C s' innalza la perpendicolare CO ; e dall' angolo opposto B si tira BS parallela ad OC : io dico che il parallelogrammo AD vien diviso in un parallelogrammo rettangolo OS , ed in due triangoli ACO , DBS parimente rettangoli.

Poichè nel parallelogrammo AD essendo AB , CD orizzontali, per la definizione II. , ed essendo OC perpendicolare, e BS parallela ad OC : ed essendo che tanto OC , quanto BS sono partite dagli angoli ottusi C , e B , e ciascuna rispettivamente è andata a terminare nell' opposta retta orizzontale : così n'av-

viene, che non solo gli angoli del parallelogrammo OS sono tutti retti; ma bensì COA del triangolo ACO, e l'angolo BSD del triangolo DBS: e conseguentemente il triangolo ottusangolo AD è stato diviso in un parallelogrammo rettangolo OS, ed in due triangoli ACO, DBS parimente rettangoli.

Sia dato dunque un parallelogrammo ottusangolo, ec.

Prop. XIV. Teorema XIII.

Figura XXVIII.

Se due parallelogrammi sono tra l'istesse parallele, ed abbiano la base eguale: e se ciascuno di essi sia diviso in un parallelogrammo rettangolo, ed in due triangoli parimente rettangoli: ne risulta che le basi degli angoli acuti, che sono nei triangoli del secondo parallelogrammo sono minori delle basi degli angoli acuti, che sono nei triangoli nel primo parallelogrammo.

Se due parallelogrammi ABCD, DBCT sono tra l'istesse parallele AT, BC, ed abbiamo la base eguale; e se ciascuno di essi sia diviso in un parallelogrammo rettangolo, secondo il problema antecedente, ed in due triangoli parimente rettangoli; cioè ABCD in un paralle-

logrammo rettangolo SO , ed in due triangoli OAD , SCB ; ed il parallelogrammo $DBCT$ nel parallelogrammo rettangolo SO , e nei due triangoli PDT , CHB parimente rettangoli: io dico che le basi DP , HC degli angoli acuti DTP , HBC che sono nel secondo parallelogrammo $DBCT$ sono minori delle basi AO , SC degli angoli acuti ADO , SBC , che sono nel primo parallelogrammo $ABCD$.

Abbenchè pel teorema XII. si sia dimostrato che la base del primo parallelogrammo $ABCD$ sia eguale alla base del secondo $DBCT$: pure le basi DP , HC degli angoli acuti DTP , HBC , che sono nel parallelogrammo $DBCT$ sono minori delle basi AO , SC , che s'oppongono agli angoli acuti ADO , SBC , che sono nel parallelogrammo $ABCD$; perchè nel teorema ottavo si è dimostrato che il parallelogrammo $DBCT$ è meno largo del parallelogrammo $ABCD$: e conseguentemente le basi degli angoli acuti che sono nei triangoli del secondo parallelogrammo sono minori delle basi degli angoli acuti, che sono nei triangoli del primo parallelogrammo.

Dunque se due parallelogrammi, &c.

Prop. XV. Teorema XIV.

Figura XXVIII.

Abbenchè due parallelogrammi ottusangoli sono tra l'istesse parallele : ed abbenchè la base dell' uno sia eguale alla base dell' altro : pure sono più acuti gli angoli di quelli del primo.

Abbenchè due parallelogrammi ottusangoli AC, TB sono tra l'istesse parallele AT BG : ed abbenchè la base di AC sia eguale alla base di TB : pure sono più acuti gli angoli del secondo TB, di quelli del primo AC.

Siano divisi in due parallelogrammi AC, TB secondo l'antecedente teorema.

Poichè essendo, pel teorema VII, gli angoli TDB, TCB del secondo parallelogrammo TB sono più attusi degli angoli DAB, DCB del primo parallelogrammo AC. Di vantaggio pel teorema antecedente, che le basi DP, HC degli angoli DTP, CBH sono minori delle basi AO, SC che s'oppongono agli angoli ADO, CBS : così per ambi le ragioni n'avviene, che gli angoli acuti DTC, DBC del secondo parallelogrammo TB sono più acuti degli angoli ADC, ABC del primo AC : e conseguentemente abbenchè due parallelogrammi sono tra l'istesse parallele, ec.

Prop. XVI. Teorema XV.

Figura XXIII.

Abbenchè due parallelogrammi siano tra l'istesse parallele, ed abbiamo la base eguale: non possono aver l'aia parimente eguale.

Abbenchè due parallelogrammi AC, TB siano tra l'istesse parallele AT, BC, ed abbiamo la base eguale: non possono avere l'aia parimente eguale.

Poichè, pel teorema XII. abbenchè la base del parallelogrammo TB sia eguale alla base del parallelogrammo AC pure pel teorema antecedente, perchè gli angoli DTC, DBC del parallelogrammo TB sono più acuti degli angoli ADC, ABC del parallelogrammo AC: così n'avviene che l'aia di TB è minore dell'aia di AC; perchè le parallele del secondo parallelogrammo si sono unite di più nella parte angolare di quello che non si sono unite le parallele del primo; e perciò di quanto le parallele si uniscono, di tanto ancora l'aia va a diminuirsi: e conseguentemente abbenchè due parallelogrammi siano tra l'istesse parallele, ed abbiamo la base eguale: non possono avere l'aia parimente eguale (1).

(1) Si avverte che se i lati che formano gli angoli acuti nel secondo parallelogrammo non si me-

Corollario.

Se il primo parallelogrammo è rettangolo , ed il secondo ottusangolo sempre l' aia del primo è maggiore di quella del secondo,

desimassero di più nell' istessa parte angolare di quello , che si medesimano i lati , che formano gli angoli acuti nel primo parallelogrammo ; allora sarebbe chiaro , che l'aia del secondo parallelogrammo sarebbe eguale a quella del primo. Ma i lati vanno a medesimarsi più nel secondo parallelogrammo , che nel primo ; per cui l' aia del secondo è minore dell' aia del primo.

Di vantaggio nel teor. V. abbiamo dimostrato che nel secondo parallelogrammo, di quanto si medesima una parallela obbliqua , di altro tanto la parallela opposta va a ribassarsi nella parte esterna, e conseguentemente la base del secondo parallelogrammo è eguale alla base del primo. Su di ciò si dee avvertire che questo eguale ribassamento , ed eguaglianza di base , non giova a sostenere l'eguaglianze delle aie ; perchè il ribassamento di una parallela nella parte esterna non va a rinfrangere la perdita dell'aia , che la prima parallela ha prodotto nel medesimarsi colla base, o sia nella parte interna : ad oggetto ancora che le parallele oblique del secondo parallelogrammo non possonò riacquistare quella parte di lunghezza che hanno perduto mediante la medesimazione.

Fine del I. Vol.

609045



